

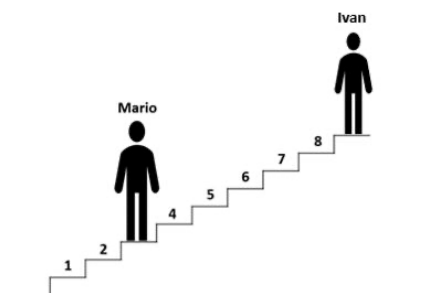
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

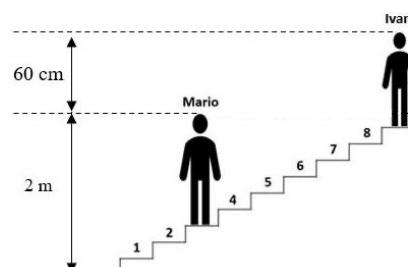
1. Mario stoji na trećoj stepenici (brojeći od dna stepeništa) i tada je njegova visina zajedno sa stepenicama jednaka 2 m. Ivan, koji je 30 cm niži od Marija, stoji na devetoj stepenici (brojeći od dna stepeništa) i tada je njegova visina zajedno sa stepenicama jednaka 2 m i 60 cm. Koliko je visok Mario, a koliko je visok Ivan ako su sve stepenice iste visine?



**Rješenje.**

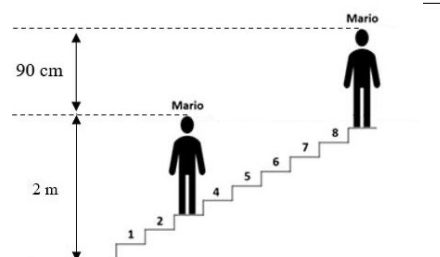
Razlika u visinama Marija i Ivana sad je 60 cm.

1 BOD



Kad bi Mario stajao na Ivanovom mjestu, tj. na devetoj stepenici, razlika bi bila za 30 cm veća jer je Mario 30 cm viši od Ivana.

2 BODA

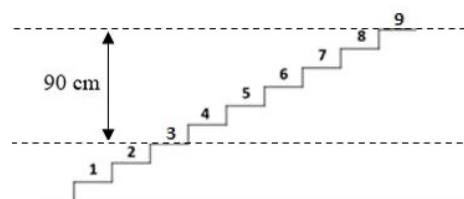


To znači da je visina šest stepenica koje su između treće i devete stepenice jednaka 90 cm.

2 BODA

Svaka stepenica visoka je  $90 \text{ cm} : 6 = 15 \text{ cm}$ .

1 BOD



Mario stoji na trećoj stepenici pa je njegova visina za  $3 \cdot 15 \text{ cm}$  manja od 2 m, to jest od 200 cm,

2 BODA

što znači da je Marijeva visina  $200 - 45 = 155 \text{ cm}$ .

1 BOD

Ivan je za 30 cm niži od Marija pa mu je visina  $155 - 30 = 125 \text{ cm}$ .



1 BOD

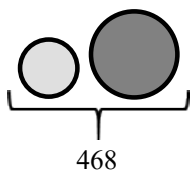
**Napomena.** Umjesto situacije kada bi Mario bio na Ivanovom mjestu, može se promatrati situaciju kada bi Ivan bio na Marijevom mjestu, tj. na trećoj stepenici, a zadatak se boduje analogno.

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Tvornica proizvodi bicikle i romobile. U siječnju je proizvela ukupno 468 vozila. Sljedeći je mjesec proizvedeno dva puta više bicikala i šest puta više romobila nego u siječnju, tako da je u veljači ukupno proizvedeno 2024 tih vozila. Koliko je bicikala, a koliko romobila proizvedeno u siječnju?

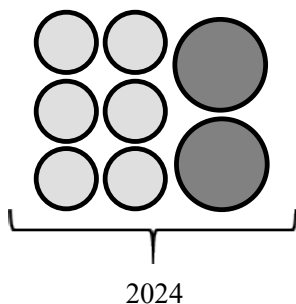
**Prvo rješenje.**

Ako je  broj proizvedenih romobila, a  broj proizvedenih bicikala u siječnju, onda vrijedi

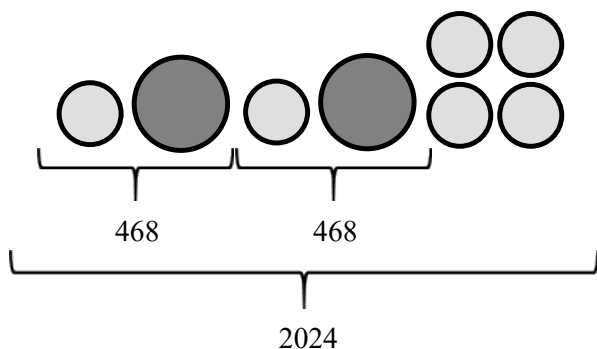


1 BOD

U veljači vrijedi



1 BOD



2 BODA

$$2024 - 2 \cdot 468 = 1088$$

2 BODA

To znači da je proizvedenih romobila u siječnju  $1088 : 4 = 272$ , a

2 BODA

broj proizvedenih bicikala u siječnju  $468 - 272 = 196$ .

2 BODA

**Napomena.** Umjesto crtežima učenici mogu do rješenja doći opisivanjem navedenih koraka ili algebarskim zapisom pomoću jednadžbi, a bodovanje se vrši analogno prijedlogu.

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.** Ako je u siječnju bio proizveden isti broj bicikala i romobila, tj. po 234, onda bi u veljači bilo proizvedeno  $2 \cdot 234 + 6 \cdot 234 = 1872$  vozila. 1 BOD

Budući da je u veljači proizvedeno 2024 vozila, tj.  $2024 - 1872 = 152$  vozila više, zaključujemo da je u siječnju proizvedeno više romobila nego bicikala. 2 BODA

Ako za 1 smanjimo broj bicikala, te povećamo broj romobila za 1, u veljači ćemo smanjiti broj bicikala za 2, a broj romobila povećati za 6. Dakle, ukupan broj vozila proizvedenih u veljači se poveća za 4. 3 BODA

Budući da želimo da se broj vozila u veljači poveća za 152, broj bicikala proizvedenih u siječnju treba smanjiti za  $152 : 4 = 38$ . 2 BODA

U siječnju je proizvedeno  $234 - 38 = 196$  bicikala, te  $234 + 38 = 272$  romobila. 2 BODA

**Napomena.** Analogno se boduju rješenja koja kreću od bilo koje druge raspodjele bicikala i romobila proizvedenih u siječnju.

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Treće rješenje.** Ako je u siječnju bio proizveden isti broj bicikala i romobila, tj. po 234, onda bi u veljači bilo proizvedeno  $2 \cdot 234 + 6 \cdot 234 = 1872$  vozila. 1 BOD

Budući da je u veljači proizvedeno 2024 vozila, a vrijedi  $2024 > 1872$ , zaključujemo da je u siječnju proizvedeno više romobila nego bicikala. 2 BODA

Krećemo od 234 bicikala i 234 romobila, uzastopno se približavamo rješenju povećavajući broj romobila, tako da je ukupan broj proizvedenih vozila u siječnju 468.

Broj bicikala u siječnju	Broj romobila u siječnju	Broj vozila u veljači
218	250	$2 \cdot 218 + 6 \cdot 250 = 1936$
198	270	$2 \cdot 198 + 6 \cdot 270 = 2016$
196	272	$2 \cdot 196 + 6 \cdot 272 = 2024$

Zaključujemo da se u veljači može proizvesti 2024 vozila ako je u siječnju proizvedeno 272 romobila i 196 bicikala. 6 BODOVA

Ako bismo dodatno povećali broj romobila u siječnju, ukupan broj vozila u veljači bi se također povećao, pa ne postoje druga rješenja. 1 BOD

**Napomena 1.** Broj pokušaja u tablici prije zapisivanja rješenja ne mora nužno biti četiri. Učenik može već u prvom smanjivanju broja bicikala i povećavanju broja romobila doći do rješenja. Ili, ako učenik ne kreće od istog broja bicikala i romobila, mora primjerima pokazati kako promjena u broju pojedinih vozila utječe na ukupan broj proizvedenih vozila u veljači te metodom uzastopnog približavanja dolazi do rješenja. Takvi se pristupi jednako boduju kao i u prijedlogu. No, ako ne obrazloži zašto je to jedino rješenje treba dobiti 9 BODOVA.

**Napomena 2.** Učenik koji samo zapiše točno rješenje bez ikakvih komentara i primjera te ne obrazloži zašto je to jedino rješenje može dobiti najviše 6 BODOVA.

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Na koliko različitih načina četiri prijateljice Ankica, Gorana, Ivana i Melita mogu međusobno podijeliti 11 jednakih fritula tako da svaka dobije barem dvije? Fritule se ne smije rezati na manje dijelove.

**Prvo rješenje.**

Kako svaka prijateljica dobiva najmanje dvije fritule, broj fritula koji ostaje nakon te podjele je

$$11 - 4 \cdot 2 = 3.$$

1 BOD

Te tri preostale fritule možemo rasporediti tako da ih dobiva jedna prijateljica, da ih podijele dvije prijateljice ili ih dijele tri prijateljice.

- 1) Tri prijateljice dobiju po 2 fritule, a jedna od njih  $2 + 3 = 5$  fritula.

1 BOD

To mogu napraviti na četiri različita načina:

Ankica	Gorana	Ivana	Melita
5	2	2	2
2	5	2	2
2	2	5	2
2	2	2	5

1 BOD

- 2) Dvije prijateljice dobiju po dvije fritule, jedna dobije  $2 + 1 = 3$  fritule, a jedna dobije  $2 + 2 = 4$  fritule.

1 BOD

To mogu napraviti na dvanaest različitih načina:

Ankica	Gorana	Ivana	Melita
2	2	3	4
2	2	4	3
2	3	2	4
2	3	4	2
2	4	2	3
2	4	3	2
3	2	2	4
3	2	4	2
3	4	2	2
4	2	2	3
4	2	3	2
4	3	2	2

3 BODA

- 3) Jedna prijateljica dobiva dvije fritule, a ostale tri po  $2 + 1 = 3$  fritule.

1 BOD

Takvu podjelu mogu napraviti na četiri različita načina.

Ankica	Gorana	Ivana	Melita
3	3	3	2
3	3	2	3
3	2	3	3
2	3	3	3

1 BOD

Ukupno ima  $4 + 12 + 4 = 20$  različitih načina koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

1 BOD

**Napomena:** Za svake četiri točno zapisane podjele dobije se 1 bod. To znači da ukoliko učenik ispiše sve mogućnosti i navede da ih je 20, ali ne zapiše obrazloženje zašto ih nema više, najviše dobije 6 BODOVA.

..... UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Kako svaka prijateljica dobiva najmanje dvije fritule, broj fritula koji ostaje nakon te podjele je

$$11 - 4 \cdot 2 = 3.$$

1 BOD

Te tri preostale fritule možemo rasporediti tako da ih dobiva jedna prijateljica, da ih podijele dvije prijateljice ili ih dijele tri prijateljice.

1) Jednu prijateljicu koja dobiva tri dodatne fritule možemo odabrati na četiri različita načina pa za takvu podjelu fritula imamo četiri različite mogućnosti.

2 BODA

2) Ako te tri fritule dijele dvije prijateljice, onda jedna od njih ima tri, a druga četiri fritule. Preostale dvije prijateljice imaju po dvije fritule.

1 BOD

Najprije odaberimo jednu od njih koja dobiva četiri fritule i nju možemo izabrati na četiri različita načina.

1 BOD

Potom odabiremo drugu (od preostale tri) koja dobiva tri fritule i nju možemo izabrati na tri različita načina.

1 BOD

Preostale dvije prijateljice ne biramo jer obje dobiju po dvije fritule. U ovom slučaju imamo ukupno  $4 \cdot 3 = 12$  različitih načina.

1 BOD

3) Ako te tri fritule podijele tri prijateljice, onda četvrta dobiva dvije.

Tu jednu koja dobiva dvije fritule možemo odabrati na četiri različita načina pa i tu imamo četiri mogućnosti.

2 BODA

Ukupno ima  $4 + 4 + 12 = 20$  različitih načina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Lea je nacrtala pravokutnik kojemu je jedna stranica dulja od druge za 3 cm. Nakon toga je nad obje kraće stranice pravokutnika nacrtala po dva jednakostranična trokuta takva da su im stranice jednako duge, kao na slici. Ako je opseg dobivenog lika 78 cm, koliki je opseg pravokutnika?



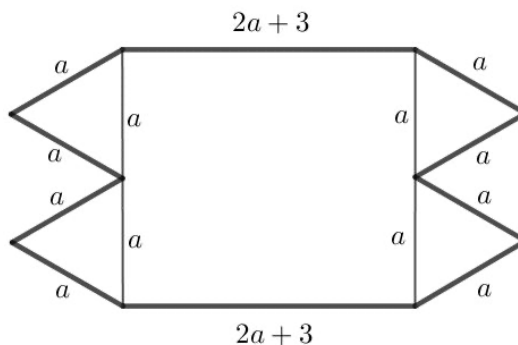
**Rješenje.**

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta duljine  $a$  izraženo u centimetrima.

Tada je duljina kraće stranice pravokutnika  $a + a = 2a$ .

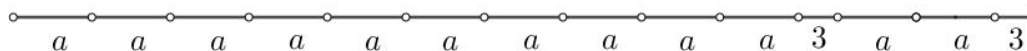
Onda je duljina dulje stranice pravokutnika  $2a + 3$ .

3 BODA



Opseg lika na slici jednak je duljini njegova ruba, to jest zbroju duljina njegovih stranica.

Osam dužina kojima je lik omeđen stranice su jednakostraničnih trokuta i duljina im je  $a$ . Preostale dvije dužine kojima je lik omeđen dulje su stranice pravokutnika i duljina im je  $2a + 3$ . Rub tog lika može se presložiti u dužinu na sljedeći način:



To znači da je opseg tog lika  $12a + 6$ .

2 BODA

Sada vrijedi:

$$12a + 6 = 78$$

$$12a = 72$$

$$a = 6 \text{ cm.}$$

2 BODA

Kraća stranica pravokutnika ima duljinu  $6 + 6 = 12$  cm, a dulja  $12 + 3 = 15$  cm.

1 BOD

Opseg pravokutnika je  $2 \cdot (12 + 15) = 2 \cdot 27 = 54$  cm.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Pas Ari promatra buhe koje s istog mjesta skaču ravno prema njemu. Neke su buhe veće, a neke manje. Kad veća buha napravi 7 jednakih skokova, do Arija joj nedostaje 3 cm. Kad manja buha napravi 10 jednakih skokova, do Arija joj nedostaje 1 cm. Duljina svakog skoka u centimetrima prirodni je broj. Ako su na početku buhe od Arija udaljene više od 2 m, kolika je najmanja moguća duljina skoka manjih buha?

**Prvo rješenje.**

Buhe se nalaze na mjestu koje je od Arija udaljeno više od  $2 \text{ m} = 200$  cm.

1 BOD

Odredimo koji sve brojevi mogu biti udaljenosti manjih buha od Arija, odnosno udaljenosti većih buha od Arija.

Udaljenost manjih buha od Arija je broj koji dobijemo tako da višekratniku broja 10 dodamo broj 1 (tj. broj koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 10). 1 BOD

Budući da je 200 višekratnik broja 10, sljedeći su višekratnici 210, 220, 230, 240, 250, ...

Udaljenosti većih buha od Arija mogu biti brojevi: 201, 211, 221, 231, 241, 251, ... 2 BODA

Udaljenost većih buha od Arija je broj koji dobijemo tako da višekratniku broja 7 dodamo broj 3 (tj. koji daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 7). 1 BOD

$200 : 7 = 28$  i ostatak 4

Prvi višekratnik broja 7 veći od 200 je 203, a sljedeći su 210, 217, 224, 231, 238, 245, ...

Udaljenosti većih buha od Arija mogu biti brojevi: 206, 213, 220, 227, 234, 241, 248, ... 2 BODA

Kako buhe skaču s istoga mjesta, tražimo najmanji broj koji može biti i udaljenost manjih i udaljenost većih buha od Arija. 1 BOD

To je broj 241, pa duljina skoka manjih buha iznosi

$(241 - 1) : 10 = 24$  cm 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Buhe su od Arija udaljene više od  $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$ . 1 BOD

$200 : 7 = 28$  i ostatak 4.

$7 \cdot 28 + 3 = 199$  što je manje od 200 pa je najmanja moguća duljina skoka većih buha 29 cm.

2 BODA

Neka je duljina skoka većih buha  $v$ , a duljina skoka manjih  $m$  izraženo u centimetrima.

Udaljenost buha od Arija  $7 \cdot v + 3$ . 1 BOD

Izračunajmo moguće udaljenosti za  $v > 28$ .

Kako je udaljenost buha od Arija jednaka i  $10 \cdot m + 1$ , dobivene udaljenosti umanjimo za 1 i razliku podijelimo s 10.

Tražena duljina skoka manjih buha  $m$  je prvi u nizu količnika bez ostatka pri dijeljenju s 10.

$v = 29$	$7 \cdot 29 + 3 = 206$ $206 - 1 = 205$ 205 nije višekratnik broja 10.	$v = 30$	$7 \cdot 30 + 3 = 213$ $213 - 1 = 212$ 212 nije višekratnik broja 10.	$v = 31$	$7 \cdot 31 + 3 = 220$ $220 - 1 = 219$ 219 nije višekratnik broja 10.
1 BOD		1 BOD		1 BOD	
$v = 32$	$7 \cdot 32 + 3 = 227$ $227 - 1 = 226$ 226 nije višekratnik broja 10.	$v = 33$	$7 \cdot 33 + 3 = 234$ $234 - 1 = 233$ 233 nije višekratnik broja 10.	$v = 34$	$7 \cdot 34 + 3 = 241$ $241 - 1 = 240$ $240 : 10 = 24$ <b><math>m = 24 \text{ cm}</math></b>
1 BOD		1 BOD		1 BOD	

**Napomena:** Ako učenici ne obrazlože zašto kreću od broja 29, moraju ispitati sve mogućnosti za vrijednost  $v$  od 1 do 28 i za to dobivaju 2 BODA.

..... UKUPNO 10 BODOVA