ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Andrija je tijekom tri dana čitao knjigu. Dok je čitao, brzina mu je čitanja bila stalna. Prvoga dana je proveo $\frac{1}{32}$ dana čitajući, a svaki sljedeći dan trećinu vremena manje nego prethodnoga dana. Koliki dio knjige, izražen u postotcima, Andrija još treba pročitati ako mu za čitanje cijele knjige treba 1 sat i 40 minuta?

Rješenje.

1 dan ima 24 sata ili $24 \cdot 60 = 1440$ minuta. 1 BOD

Andrija je prvoga dana proveo čitajući $\frac{1}{32}$ dana, odnosno $1440 : 32 = 45$ minuta. 1 BOD

Jedna trećina od 45 je 15, pa je drugoga dana proveo čitajući $45 - 15 = 30$ minuta. 2 BODA

Jedna trećina od 30 je 10, pa je trećega dana proveo čitajući $30 - 10 = 20$ minuta. 2 BODA

Tijekom tri dana Andrija je proveo čitajući ukupno $45 + 30 + 20 = 95$ minuta. 1 BOD

Andriji je za čitanje cijele knjige potrebno 1 sat i 40 minuta, odnosno, $60 + 40 = 100$ minuta.
1 BOD

Kako bi pročitao cijelu knjigu, treba čitati još $100 - 95 = 5$ minuta. 1 BOD

Izraženo postotkom, to je $\frac{5}{100} = 5\ \%$. 1 BOD

Andrija treba pročitati još 5 % knjige.

…......………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Zbroj svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih s 45 kojima je znamenka desetica tri puta veća od znamenke stotica umanji za zbroj svih troznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih s 18 kojima je znamenka stotica najveći prosti jednoznamenkasti broj.

Rješenje.

Broj je djeljiv sa 45 ako je djeljiv s 9 i 5. Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, a s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5. 1 BOD

Kako je znamenka desetica tri puta veća od znamenke stotica, moguće su sljedeće kombinacije tih dviju znamenaka:

znamenka stotica 0, znamenka desetica 0
znamenka stotica 1, znamenka desetica 3
znamenka stotica 2, znamenka desetica 6
znamenka stotica 3, znamenka desetica 9 1 BOD

Znamenka jedinica traženih četveroznamenkastih brojeva može biti 0 ili 5.

Ako je znamenka jedinica 0, tada (zbog pravila o djeljivosti s 9) imamo sljedeća rješenja:
9000, 5130, 1260 i 6390. 1 BOD

Ako je znamenka jedinica 5, tada (zbog pravila o djeljivosti s 9) imamo sljedeća rješenja:
4005, 9135, 5265 i 1395. 1 BOD

Zbroj svih četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju traženo svojstvo iznosi:
$9000 + 5130 + 1260 + 6390 + 4005 + 9135 + 5265 + 1395 = 41580.$ 1 BOD

Broj je djeljiv s 18 ako je djeljiv s 9 i 2. Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, a s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Kako je znamenka stotica najveći jednoznamenkasti prosti broj, znamenka stotica je 7. 1 BOD
Zbog pravila o djeljivosti s 9 i 2 imamo sljedeća rješenja:
720, 702, 792, 774, 756 i 738. 1 BOD
Zbroj svih troznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju traženo svojstvo iznosi:
$720 + 702 + 792 + 774 + 756 + 738 = 4482.$ 1 BOD

Tražena razlika je $41580 - 4482 = 37098.$ 1 BOD
…....…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Ako je učenik kod određivanja četveroznamekastih brojeva propustio uočiti da znamenke desetica i stotica mogu biti obje nula tj. izostavio je brojeve 9000 i 4005, zbroj je 28575, razlika 24093, zadatak bodovati s najviše 7 BODOVA.

3. Pet kutija imaju različite mase. Ako za svake dvije kutije izračunamo zbroj njihovih masa u kilogramima, dobivamo sljedećih 10 brojeva: 114, 85, 122, 74, 133, 118, 147, 99, 107 i 93. Kolika je masa svake od pet kutija?

Rješenje.
Neka su mase kutija a, b, c, d i e pri čemu je $a < b < c < d < e$.

Kada zbrajamo po dvije kutije, dobijemo ukupno 10 zbrojeva:

$a + b, a + c, a + d, a + e, b + c, b + d, b + e, c + d, c + e, d + e.$

Uočimo da se svaki broj pojavljuje u točno 4 zbroja.

Stoga je zbroj svih 10 zbrojeva $4 \cdot (a + b + c + d + e)$ 1 BOD

Zbroj svih deset zadanih brojeva iznosi

$114 + 85 + 122 + 74 + 133 + 118 + 147 + 99 + 107 + 93 = 1092.$ 1 BOD

Izjednačavanjem dobivenih zbrojeva imamo:

$4 \cdot (a + b + c + d + e) = 1092$

$a + b + c + d + e = 1092 : 4$

$a + b + c + d + e = 273.$

Dakle, zbroj svih 5 masa je 273 kg. 1 BOD

Najmanji zbroj dobijemo kada zbrojimo dva najmanja broja, a to su a i b. Najveći zbroj dobijemo kada zbrojimo dva najveća broja, a to su d i e. Dakle, najveće dvije mase imaju zbroj $d + e = 147$ kg, a najmanje dvije $a + b = 74$ kg. 1 BOD

Zbrajanjem jednakosti dobivamo $a + b + d + e = 221$, a kako je $a + b + c + d + e = 273$ slijedi da je $c = 273 - 221 = 52$. 1 BOD

Drugi po veličini zbroj dobijemo kada zbrojimo najmanji i treći po veličini, a to su a i c pa je $a + c = 85$ iz čega slijedi $a = 85 - 52 = 33$. 2 BODA

$a + b = 74$ pa je $b = 74 - 33 = 41$. 1 BOD

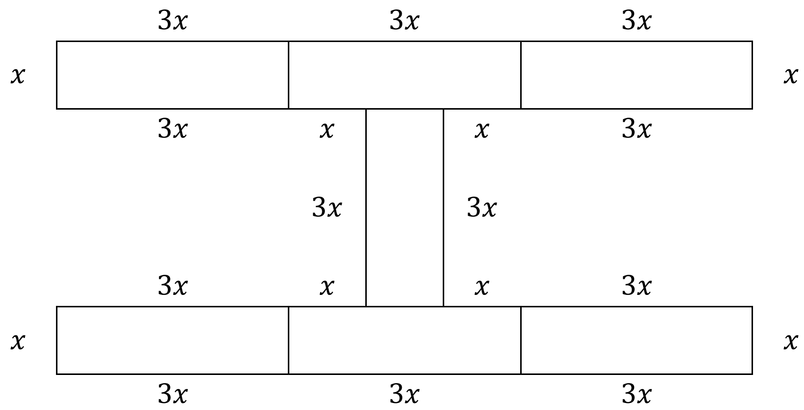
Predzadnji po veličini zbroj dobijemo kada zbrojimo najveći i treći po veličini, a to su c i e pa je $c + e = 133$ iz čega slijedi $e = 133 - 52 = 81$. 1 BOD

$d + e = 147$ pa je $d = 147 - 81 = 66$. 1 BOD

Mase kutija su: 33 kg, 41 kg, 52 kg, 66 kg i 81 kg.
…………………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

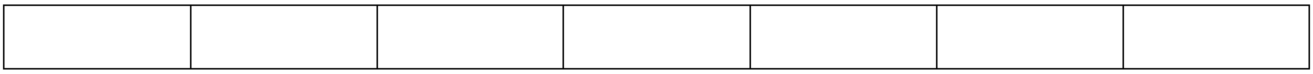
4. Sedam jednakih pravokutnih pločica složeno je kao na slici. Duljina jedne stranice pločice tri je puta veća od druge, a opseg je tako dobivenog lika 132 mm. Koliko se pravokutnika različitih opsega može složiti upotrebljavajući svih tih sedam pločica i koliko iznose njihovi opsezi?

Rješenje.
Duljine stranica pravokutne pločice označimo s x i $3x$. 1 BOD



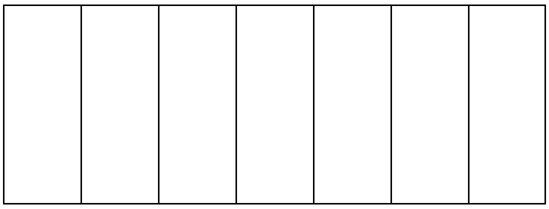
Sa slike imamo da je opseg lika $o = 12 \cdot 3x + 8x = 44x$. 1 BOD
$44x = 132$
$x = 132 : 44$
$x = 3$ 1 BOD
Duljine stranica pravokutne pločice su 3 mm i $3 \cdot 3 = 9$ mm. 1 BOD

1) Prvi pravokutnik



Pravokutnik ima stranice duljine 3 mm i $7 \cdot 9$ mm $= 63$ mm pa je njegov opseg
$o = 2(3 + 63) = 2 \cdot 66 = 132$ mm. 2 BODA

2) Drugi pravokutnik



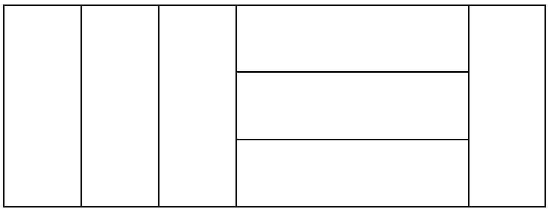
Pravokutnik ima stranice duljine 9 mm i $7 \cdot 3 = 21$ mm pa je njegov opseg
$o = 2(9 + 21) = 2 \cdot 30 = 60$ mm. 2 BODA

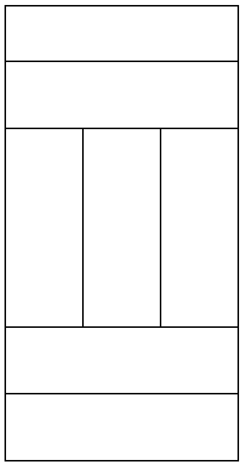
Svaka pločica sadrži 3 osnovna kvadrata (duljine stranica 3 mm) pa 7 pločica ima ukupno 21 osnovni kvadrat. Prvi pravokutnik ima 21 osnovni kvadrat u retku i 1 osnovni kvadrat u svakom stupcu. Drugi pravokutnik ima u svakom retku 7 osnovnih kvadrata, a u svakom stupcu 3. Svaki pravokutnik mora imati jednaki broj osnovnih kvadrata u svakom retku i stupcu. Kako 21 možemo u obliku umnoška napisati samo na dva različita načina ($21 = 1 \cdot 21$, $21 = 3 \cdot 7$) zaključujemo da postoje dva rješenja.

2 BODA

………………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Pravokutnik dimenzija 9 mm i 21 mm može se slaganjem pravokutnih pločica složiti na više različitih načina. Neki od načina slaganja prikazani su na slikama. Treba zaključiti da se radi o pravokutnicima jednakih dimenzija tj. opsega bez obzira na koji su način složeni.





5. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva kojima su sve znamenke različite, a među kojima se znamenke 1 i 2 pojavljuju na susjednim dekadskim mjestima?

Rješenje.
Ako su znamenke 1 i 2 prve dvije znamenke, brojevi su oblika $\overline{12abc}$ ili $\overline{21abc}$. 1 BOD

Znamenku a možemo odabrati iz skupa $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 8 različitih načina, znamenku b na 7, a znamenku c na 6 pa imamo ukupno $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 672$ broja. 3 BODA

Ako su znamenke 1 i 2 na drugom i trećem mjestu, brojevi su oblika $\overline{d12ef}$ ili $\overline{d21ef}$. 1 BOD

Znamenku d možemo odabrati iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 7 različitih načina jer nula ne može biti prva, znamenku e također na 7 jer može biti i nula, a znamenku f na 6 pa imamo ukupno $2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 588$ brojeva. 3 BODA

Ako su znamenke 1 i 2 na trećem i četvrtom mjestu, odnosno na četvrtom i petom, također imamo 588 brojeva. 1 BOD

$672 + 3 \cdot 588 = 2436$

Ukupno ima 2436 brojeva. 1 BOD
…………………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA