ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

6. razred – rješenja

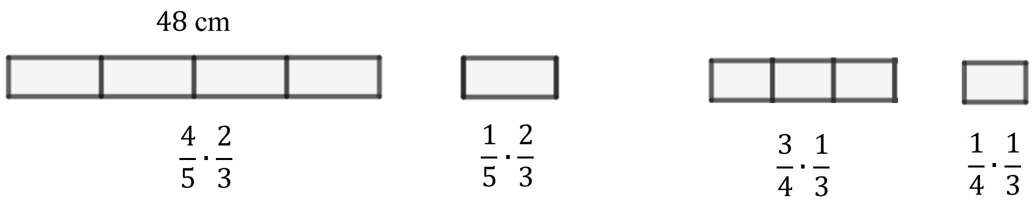
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Mesar jednu kobasicu reže na dijelove. Prvo je od cijele kobasice odsjekao njezinu trećinu. Dobivena dva dijela također je prerezao: od većega dijela odsjekao je njegovu petinu, a od manjega dijela odsjekao je njegovu četvrtinu. Kolika je duljina najmanjega dobivenoga dijela kobasice ako je duljina najvećeg dijela 48 cm?

Prvo rješenje.

Nakon prvog rezanja imamo dva dijela kobasice:

Nakon drugog rezanja imamo četiri dijela kobasice:



4 BODA (po 1 BOD za svaki dio)

Najveći dio čini $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ cijele kobasice i ima duljinu 48 cm. 1 BOD

Duljina cijele kobasice iznosi $48 : \frac{8}{15} = 48 \cdot \frac{15}{8} = 90$ cm. 2 BODA

Najmanja dva dijela kobasice čine $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$ kobasice i $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ kobasice.

Vrijedi da je $\frac{2}{15} > \frac{1}{12}$ jer je $2 \cdot 12 > 15 \cdot 1$. 2 BODA

Najmanji dobiveni dio ima duljinu $\frac{1}{12} \cdot 90 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7.5$ cm. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Veći dio odrezan od $\frac{2}{3}$ kobasice je nužno najveći odrezani dio jer je veći od $\frac{1}{3}$ kobasice, a time i od svih preostalih odrezanih dijelova.

Dio kobasice dug 48 cm je četiri petine većeg dijela kobasice nakon prvog rezanja te je 4 puta dulji od jedne petine tog većeg dijela. 2 BODA

Jedna petina većeg dijela je 48 cm : $4 = 12$ cm duljine. 2 BODA

Ukupna duljina većeg dijela nakon prvog rezanja je 48 cm $+ 12$ cm $=$ 60 cm. 1 BOD

Jedna trećina početne kobasice je dva puta kraća od većeg dijela nakon prvog rezanja. 2 BODA

Duljina kraćeg dijela nakon prvog rezanja je 60 cm $: 2 = 30$ cm. 1 BOD

Duljina najkraćeg dijela je jedna četvrtina od 30 cm, odnosno 30 cm : $4 = 7.5$ cm. 1 BOD

To je najmanji dio jer je sljedeći po veličini dio duljine 12 cm. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Veći dio odrezan od $\frac{2}{3}$ kobasice je nužno najveći odrezani dio jer je veći od $\frac{1}{3}$ kobasice, a time i od svih preostalih odrezanih dijelova.

Neka je x duljina jedne četvrtine manjeg dijela nakon prvog rezanja.
Duljina tog manjeg dijela je $4x$. 2 BODA

Duljina većeg dijela nakon prvog rezanja je $8x$, 2 BODA
a četiri petine od tog dijela je dio duljine 48 cm. 1 BOD

Vrijedi

$\frac{4}{5} \cdot 8x = 48,$

iz čega slijedi

$x = 48 \cdot \frac{5}{32} = \frac{15}{2} = 7.5.$ 2 BODA

Jedna petina većeg dijela nakon prvog rezanja kobasice je dio duljine $48 : 4 = 12$ cm. 2 BODA

Stoga je duljina najkraćeg dijela 7.5 cm,
a to je najmanji dio jer je sljedeći po veličini dio duljine 12 cm. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Rješenja učenika treba vrednovati prema jednom ponuđenom načinu bodovanja, tj. nije moguće zbrajati bodove iz različitih rješenja.

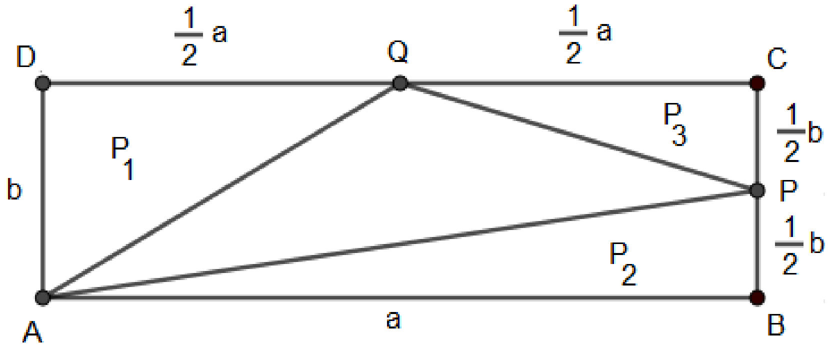
2. Neka su P i Q redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$. Koliki postotak površine pravokutnika $ABCD$ čini trokut APQ?

Rješenje.

Pola duljine a je $\frac{1}{2}a$.

Pola duljine b je $\frac{1}{2}b$.

Na skici su označena polovišta stranica pravokutnika i duljine $a, \frac{1}{2}a, b, \frac{1}{2}b$ te površine P_1, P_2 i P_3.



Skica: 2 BODA

Površina pravokutnika: $P_p = a \cdot b$.

Površina pravokutnog trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika s istim duljinama stranica kao što su katete pravokutnog trokuta, pa slijedi:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{ab}{4}$$

1 BOD

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} b = \frac{ab}{4}$$

1 BOD

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b = \frac{ab}{8}$$

1 BOD

Površina trokuta APQ dobije se kada od površine pravokutnika oduzmemo površine pravokutnih trokuta:

$$P_\Delta = ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{8} = \frac{8ab - 2ab - 2ab - ab}{8} = \frac{3ab}{8}.$$

3 BODA

Postotak površine trokuta od ukupne površine pravokutnika je

$P_\Delta : P_p \cdot 100 = \frac{3ab}{8} : ab \cdot 100 = \frac{3ab}{8} \cdot \frac{1}{ab} \cdot 100 = 300 : 8 = 37.5\ \%.$ 2 BODA

Umnožak ab možemo staviti u nazivnik i skratiti jer mora biti $a \neq 0, b \neq 0$. U protivnom pravokutnik ne bi postojao.

…………………………..………………………………………………...…..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Zbroj 2024 uzastopna parna cijela broja iznosi $1\ 171\ 896$. Koji je najveći od tih brojeva?

Prvo rješenje.
Budući da se radi o uzastopnim parnim brojevima (razlika susjednih brojeva je konstantna), aritmetička sredina svih brojeva jednaka je aritmetičkoj sredini prvog i zadnjeg broja. 3 BODA

Aritmetička sredina svih brojeva je $1\ 171\ 896 : 2024 = 579$. 2 BODA

Neka je n traženi broj.

Tada je $n - 4046$ prvi od 2024 uzastopna parna cijela broja. 2 BODA

Vrijedi:

$$\frac{(n-4046)+n}{2} = 579$$

$n - 2023 = 579$ 2 BODA

$n = 579 + 2023 = 2602$ 1 BOD

…………………………..…………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Neka je $n + 2024$ traženi broj. 1 BOD

Tada je:

$$\underbrace{(n-2022)+\cdots+(n-4)+(n-2)+n+(n+2)+(n+4)+\cdots+(n+2022)+(n+2024)}_{2024\ \text{pribrojnika}} =$$

$= 1\ 171\ 896$ 3 BODA

Nakon uklanjanja zagrada i poništavanja suprotnih brojeva dobijemo:

$2024n + 2024 = 1\ 171\ 896$ 3 BODA

$2024n = 1\ 171\ 896 - 2024$

$2024n = 1\ 169\ 872$ 1 BOD

$n = 1\ 169\ 872 : 2024$

$n = 578$ 1 BOD

Najveći među parnim cijelim brojevima koji daju zadani zbroj je
$n + 2024 = 578 + 2024 = 2602$. 1 BOD

………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Neka je n traženi broj.

Tada je:

$$\underbrace{n+(n-2)+(n-4)+(n-6)+\cdots+(n-4046)}_{2024\ \text{pribrojnika}} = 1\ 171\ 896$$

2 BODA

$2024n - 0 - 2 - 4 - \cdots - 4046 = 1\ 171\ 896$ 1 BOD

Primijenimo Gaussovu dosjetku kako bismo izračunali zbroj:

$2024n - 2024 \cdot 4046 : 2 = 1\,171\,896$ 3 BODA

$2024n - 2024 \cdot 2023 = 1\,171\,896$ 1 BOD

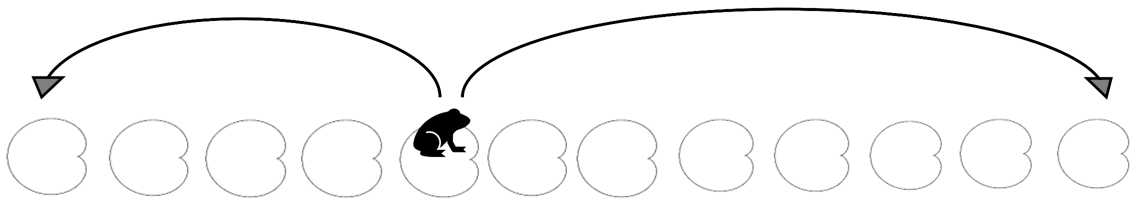
$2024 \cdot (n - 2023) = 1\,171\,896 \quad /: 2024$ 1 BOD

$n - 2023 = 579$ 1 BOD

$n = 579 + 2023 = 2602$ 1 BOD

………………………..……………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

4. Žaba skače po lopočima. Može skočiti 7 lopoča udesno ili 4 lopoča ulijevo. Koliki je najmanji broj skokova potreban da bi se žaba pomaknula za točno 2024 lopoča udesno?



Prvo rješenje.

Označimo s a broj skokova udesno i s b broj skokova ulijevo.

Tada je $7a - 4b = 2024$ za prirodne brojeve a i b, tj. 1 BOD

$7a = 2024 + 4b = 4 \cdot (506 + b)$, 3 BODA

pa 7 mora dijeliti $506 + b$. 1 BOD

Budući da 506 daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 7, b pri dijeljenju sa 7 mora davati ostatak 5. 2 BODA

Želimo što manji b i što manji a, pa uzimamo $b = 5$ i dobivamo $a = 292$. 2 BODA

Ukupno je potrebno najmanje $292 + 5 = 297$ skokova. 1 BOD

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Uočimo da nije važno kojim redom žaba izvrši skokove već samo koliko skokova učini ulijevo, a koliko udesno. 2 BODA

Pretpostavimo da žaba prvo skače ulijevo. Žaba mora prvo skakati ulijevo sve dok ukupan broj lopoča koje mora preskočiti udesno ne bude djeljiv sa 7. 2 BODA

Pri dijeljenju sa 7:
2024 daje ostatak 1,
2028 daje ostatak 5 (1 skok ulijevo),
2032 daje ostatak 2 (2 skoka ulijevo),
2036 daje ostatak 6 (3 skoka ulijevo),
2040 daje ostatak 3 (4 skoka ulijevo),
2044 je djeljiv sa 7 (5 skokova ulijevo). 3 BODA

Žaba nakon 5 skokova ulijevo treba napraviti još $2044 : 7 = 292$ skokova udesno. 2 BODA

Ukupno je potrebno najmanje $292 + 5 = 297$ skokova. 1 BOD

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Dijeljenjem zaključujemo da je 2024 : 7 = 289 i ostatak 1.
Dakle, žabi je potrebno više od 289 skokova da se pomakne za točno 2024 lopoča udesno.
Skačući 289 skokova udesno pomakne se za točno 2023 lopoča udesno. 2 BODA

Žaba se mora pomaknuti još jedan lopoč udesno.
Stoga će morati barem još jednom skočiti udesno za 7 lopoča, bez obzira skoči li prije toga neki broj puta ulijevo. Dakle, žaba će morati napraviti više od 290 skokova. 2 BODA

Budući da će sigurno imati barem 290 skokova udesno, žaba će se pomaknuti barem za 2030 lopoča udesno. Stoga će morati nekad napraviti i barem dva skoka ulijevo, te će ukupno napraviti više od 292 skokova. 2 BODA

Ako žaba napravi samo 290 skokova udesno i 2 skoka ulijevo naći će se na 2022. lopoču, te zaključujemo da se mora pomaknuti još dva lopoča udesno. Ponavljamo zaključivanje na sličan način: žaba će morati skočiti barem još jednom udesno i barem dva puta ulijevo (u nekom trenutku). Dakle, broj skokova je barem 295. 2 BODA

Ako napravi samo opisane skokove, žaba se nalazi na 2021. lopoču. Zato mora barem još jednom skočiti udesno (tada je na 2028. lopoču) i barem još jednom ulijevo, te tako dolazi na 2024. lopoč. Dakle, žaba zaista može doći do 2024. lopoča u 297 skokova i nije moguće doći u manje skokova. 2 BODA
……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem zapisu nema nula i kojima je zbroj svih znamenka veći od njihova umnoška?

Rješenje. Poznato je da niti jedna znamenka traženog broja nije nula. Umnožak znamenki bit će manji ako među njima ima jedinica. Dokazat ćemo da traženi brojevi imaju barem tri jedinice.

Prvo, dokažimo da nema traženih brojeva kojima niti jedna znamenka nije jedinica.
U slučaju da niti jedna znamenka tog broja nije jedinica, najmanji bi se umnožak znamenki postizao za broj 22222, no tada je $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 > 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$, dakle umnožak znamenki je veći od njihovog zbroja.
Zbroj znamenki peteroznamenkastog broja može biti najviše $9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$. Povećamo li broju 22222 barem jednu znamenku za barem 1, umnožak znamenki će biti barem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$, što je više od najvećeg mogućeg zbroja znamenki.
Stoga barem jedna znamenka traženog peteroznamenkastog broja mora biti jedinica. 2 BODA

Drugo, pokažimo da nema traženih brojeva koji imaju točno jednu jedinicu. Najmanji umnožak se tada postiže s četiri dvojke i jednom jedinicom. U tom slučaju je umnožak 16, a zbroj 9, pa ta mogućnost otpada. Svakim povećanjem neke znamenke za 1 zbroj se uveća za 1, a umnožak za više od 1, pa takvih mogućnosti nema. 1 BOD

Treće, pokažimo da nema traženih brojeva koji imaju točno dvije jedinice. Najmanji umnožak se tada postiže s tri dvojke i dvije jedinice. U tom slučaju je i umnožak i zbroj jednak 8, pa ta mogućnost otpada. Svakim povećanjem neke znamenke za 1 zbroj se uveća za 1, a umnožak za više od 1, pa takvih mogućnosti nema. 1 BOD

Razmotrimo još slučajeve u kojima su barem tri znamenke traženog broja jedinice.

Broj jedinica	Traženi broj	Zbroj veći od umnoška?	Broj slučajeva	
5	11111	DA $(5 > 1)$	**1**	1 BOD
4	$21111, 12111, 11211, 11121, 11112$	DA $(6 > 2)$	5	
	$31111, 13111, 11311, 11131, 11113$	DA $(7 > 3)$	5	
	$41111, \dots$	DA $(8 > 4)$	5	
	$51111, \dots$	DA $(9 > 5)$	5	
	$61111, \dots$	DA $(10 > 6)$	5	
	$71111, \dots$	DA $(11 > 7)$	5	
	$81111, \dots$	DA $(12 > 8)$	5	
	$91111, \dots$	DA $(13 > 9)$	5	
		Ukupno s četiri jedinice:	$8 \cdot 5 = \mathbf{40}$	1 BOD
3	$22111, 21211, 21121, 21112, 12211, 12121, 12112, 11221, 11212, 11122$	DA $(7 > 4)$	10*	1 BOD
	$32111, 31211, 31121, 31112, 13211, 13121, 13112, 11321, 11312, 11132, 23111, 21311, 21131, 21113, 12311, 12131, 12113, 11231, 11213, 11123$	DA $(8 > 6)$	20**	1 BOD
	$42111, 41211, 41121, 41112, 14211, 14121, 14112, 11421, 11412, 11142, 24111, 21411, 21141, 21114, 12411, 12141, 12114, 11241, 11214, 11124$	DA $(8 > 6)$	20***	1 BOD
		Ukupno s tri jedinice:	**50**	

Ukupno ima $1 + 40 + 10 + 20 + 20 = 91$ takav peteroznamenkasti broj. 1 BOD

* Učenik ne mora nabrojati sve mogućnosti već može njihov broj odrediti na sljedeći način: jednu dvojku možemo staviti na bilo koje od 5 mjesta, drugu dvojku na bilo koje od preostala 4 (jedinicama popunimo preostala tri mjesta). No, time smo mogućnosti brojali dvostruko jer su dvije dvojke jednake znamenke. Zato broj mogućnosti treba podijeliti s 2, odnosno imamo $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ mogućnosti.

** Učenik ne mora nabrojati sve mogućnosti već može njihov broj odrediti na sljedeći način: dvojku možemo staviti na bilo koje od 5 mjesta, a trojku na bilo koje od preostala 4 (jedinicama popunimo preostala tri mjesta). Stoga imamo $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti.

*** Učenik se može pozvati na prethodni slučaj.

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Svi traženi brojevi se mogu odrediti i na drugačije načine, na primjer promatranjem umnoška znamenki. Mogući umnošci su od 1 do 9. Određivanje svih brojeva nosi 5 BODOVA, a po 1 BOD nosi: ideja promatranja umnoška zajedno s brojem 11111, određivanje svih brojeva za koje je umnožak znamenki 2,3,5,7 ili 9, određivanje svih brojeva s umnoškom znamenki 4, određivanje svih brojeva s umnoškom znamenki 6, određivanje svih brojeva s umnoškom znamenki 8. Odgovor koliko ima traženih brojeva ukupno nosi 1 BOD (i taj broj se dodjeljuje ako je dan odgovor bez obrazloženja). Dokaz da nema traženog broja kojem su znamenke dvije trojke i tri jedinice nosi 1 BOD, a dokaz da umnožak ne može biti veći od 9 nosi 3 BODA.