ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** U magičnome kvadratu zbroj je brojeva u svakome retku, stupcu i na obje dijagonale jednak. Na slici je prikazan kvadrat $3 \times 3$ u čija su četiri polja upisani racionalni brojevi. Ispitaj je li moguće u preostala prazna polja upisati racionalne brojeve tako da kvadrat bude magičan.

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | | |
| | | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | | 2.4 |

**Rješenje.**

Tražene brojeva u magičnom kvadratu označimo s $a$, $b$, $c$, $d$ i $e$.

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | $e$ | 2.4 |

Zbroj brojeva u svakom retku/stupcu/dijagonali je jednak, pa se iz prvog stupca i drugog retka dobiva:

$3.6 + c + 4\frac{4}{5} = c + d + 5\frac{2}{5}$ 2 BODA

$8.4 = d + 5.4$

$d = 8.4 - 5.4 = 3$ 1 BOD

Zbroj brojeva na jednoj dijagonali je $3.6 + 3 + 2.4 = 9$. 1 BOD

Kvadrat će biti magičan ako zbroj članova u svim stupcima, retcima i na obje dijagonale iznosi 9.

Iz drugog retka se dobiva:

$c = 9 - 3 - 5\frac{2}{5} = 0.6$ 1 BOD

Iz trećeg stupca se dobiva:

$b = 9 - 3.6 - 2.4 = 1.2$ 1 BOD

Iz trećeg retka se dobiva:

$e = 9 - 4\frac{4}{5} - 2.4 = 1.8$ 1 BOD

Iz prvog retka se dobiva:

$a = 9 - 3.6 - 1.2 = 4.2$ 1 BOD

Treba još provjeriti je li zbroj magičan u prvom i drugom stupcu te na drugoj dijagonali:

$3.6 + 0.6 + 4.8 = 4.2 + 3 + 1.8 = 4.8 + 3 + 1.2 = 9$ 2 BODA

Kako je zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale je jednak 9 kvadrat je magičan.

…....………………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1.** Ako učenik drugim redoslijedom dođe do točnih rezultata, vrednovati na sljedeći način: određivanje prvog nepoznatog broja 3 BODA, zbroj po stupcima/retcima/dijagonalama 1 BOD, svaki sljedeći broj po 1 BOD, te provjera zbroja u preostalim retcima/stupcima/dijagonali koji nisu korišteni za račun nepoznatih brojeva 2 BODA.

**Napomena 2.** Za potpuno rješenje nije potrebno prikazati postupak jednadžbama već je dovoljno odrediti brojeve koji nedostaju (8 BODOVA) te provjeriti da zbroj po svim stupcima/retcima i dijagonalama iznosi 9 (2 BODA).

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | 4.2 | 1.2 |
| 0.6 | 3 | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | 1.8 | 2.4 |

**2.** Svakoga sata Martina pročita jednak broj stranica knjige. Martina je najprije izračunala koliko bi stranica trebala pročitati svakoga sata da bi knjigu pročitala u točno zadanome roku. Potom je izračunala da bi čitanje cijele knjige završila 2.5 sati prije roka ako bi svakoga sata pročitala dvije stranice više od planiranoga. Ako bi svakoga sata pročitala četiri stranice više od planiranoga, onda bi knjigu pročitala 4.5 sati prije roka. Koliko stranica ima knjiga i koliko vremena treba Martini da pročita cijelu knjigu?

**Rješenje.**

Neka je $x$ broj stranica koje Martina pročita svakoga sata, a $y$ broj sati (rok) u kojem treba pročitati cijelu knjigu. Ukupan broj stranica knjige iznosi $x \cdot y$.

Ako svakoga sata pročita dvije stranice više $(x+2)$, završit će čitanje cijele knjige za

$(y-2.5)$ sati pa vrijedi $(x+2)\cdot(y-2.5) = x \cdot y$. 2 BODA

tj. $xy + 2y - 2.5x - 5 = xy$

$2y = 5 + 2.5x$. 1 BOD

Ako svakoga sata pročita četiri stranice više $(x+4)$ završit će čitanje cijele knjige za

$(y-4.5)$ sati pa vrijedi $(x+4)\cdot(y-4.5) = x \cdot y$. 2 BODA

tj. $xy + 4y - 4.5x - 18 = xy$

$4y = 4.5x + 18$. 1 BOD

Pomnožimo li prvu jednadžbu s 2 dobit ćemo njoj ekvivalentnu jednadžbu

$4y = 10 + 5x$. 1 BOD

Izjednačavanjem jednakih vrijednosti dobije se jednadžba

$5x + 10 = 18 + 4.5x$

te $x = 16$. 1 BOD

Za $x = 16$ vrijedi $2y = 5 + 2.5 \cdot 16$

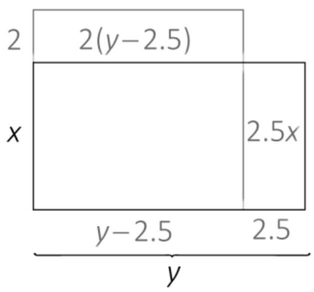
$2y = 45$

$y = 22.5$ 1 BOD

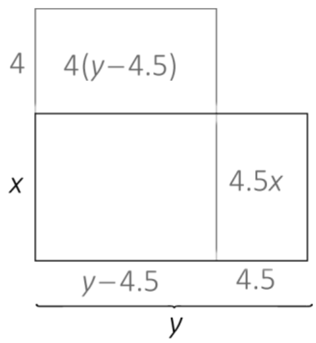
Martina treba pročitati $x \cdot y = 16 \cdot 22.5 = 360$ stranica knjige za 22.5 sati. 1 BOD

…....…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1.** Do sustava se može doći i grafičkom metodom. Svaku linearnu jednadžbu vrednovati s 3 BODA.




$2(y-2.5) = 2.5x$




$4(y-4.5) = 4.5x$

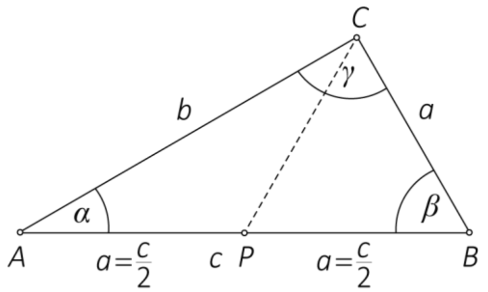
**Napomena 2.** Vrijeme izračunato u bilo kojoj mjernoj jedinici vremena vrednovati ravnopravno.

**3.** Kolike su veličine kutova raznostraničnoga trokuta ako je srednji kut po veličini aritmetička sredina preostala dva kuta i ako je duljina najdulje stranice trokuta dva puta veća od duljine najkraće stranice?

**Rješenje.**

Neka su u raznostraničnom trokutu *ABC* duljine stranica $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$, pri čemu je $a < b < c$, te neka je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = \beta$ i $|\sphericalangle ACB| = \gamma$.

Skica:




1 BOD

Zbog uvjeta zadatka slijedi da je $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, tj, 2β = α + γ. 1 BOD

Kako je α + β + γ = 180° , zamjenom dobivene vrijednosti vrijedi jednakost 2β + β = 180°,

tj. vrijedi β = 60°. 1 BOD

Prema drugom uvjetu zadatka $c = 2a$ ili $a = \frac{c}{2}$ pa je $\gamma > \alpha$.

Neka je točka *P* polovište najdulje stranice $|AB| = c$ trokuta $ABC$.

Tada je $|AP| = |BP| = \frac{c}{2}$, a zbog $a = \frac{c}{2}$ slijedi da je $|BP| = |BC| = \frac{c}{2}$. 1 BOD

To znači da je trokut *BCP* jednakokračan s krakovima $\overline{BP}$ i $\overline{BC}$ 1 BOD

i kutovima uz osnovicu $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle PCB| = 60°$.

Slijedi da je trokut *BCP* jednakostraničan. 1 BOD

Zbog toga je $|PB| = |PC|$, a kako vrijedi $|PA| = |PB|$, vrijedi $|PA| = |PC|$. Slijedi da je trokut *PCA* jednakokračan s kutovima uz osnovicu $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle ACP| = \alpha$. 1 BOD

Kako je $|\sphericalangle BPC| = 60°$ vanjski kut trokuta *PCA* vrijedi jednakost α + α = 60° , tj. α = 30°. 2 BODA

Slijedi da je $\gamma = |\sphericalangle ACB| = 90°$. 1 BOD

………………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

**4.** Satna i minutna kazaljka na zidnom satu u razdoblju između 11 i 12 sati u točno dva trenutka određuju pravi kut. Odredi, s točnošću na sekundu, koliko vremena prođe između ta dva trenutka.

**Prvo rješenje.**

Neka je $x$ broj minuta nakon 11 sati kada će satna i minutna kazaljka prvi puta odrediti pravi kut, tj. kut čija je mjera 90°.

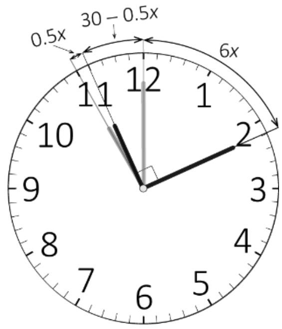
Minutna kazaljka za jednu minutu prijeđe $\frac{1}{60}$ punog kruga tj. $\frac{360°}{60} = 6°$. 1 BOD

Nakon $x$ minuta minutna će kazaljka prijeći $(6x)°$

Satna kazaljka za jedan sat prijeđe $\frac{360°}{12} = 30°$ pa za jednu minutu prijeđe $\frac{30°}{60}$ =0.5°. 1 BOD

Nakon $x$ minuta satna će kazaljka prijeći $(0.5x)°$.

Satna kazaljka kreće od položaja „11“, a velika od položaja „12“ pa kazaljke prvi puta određuju pravi kut kada vrijedi



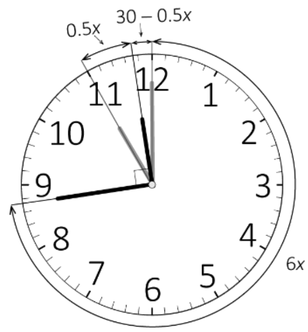

$30 - 0.5x + 6x = 90,$ 2 BODA

tj. vrijedi $5.5x = 60$, odnosno

$x = \frac{600}{55} = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$ minuta. 1 BOD

Kazaljke će prvi puta odrediti pravi kut u 11 sati i $10\frac{10}{11}$ minuta.

Na sličan način odredimo kada će kazaljke drugi puta odrediti pravi kut.
Vrijedi




$30 - 0.5x + 6x = 270,$ 2 BODA

tj. vrijedi $5.5x = 240$, odnosno

$x = \frac{2400}{55} = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}$ minuta. 1 BOD

Kazaljke će drugi puta odrediti pravi kut u 11 sati i $43\frac{7}{11}$ minuta.

Znači između ta dva trenutka prošlo je $43\frac{7}{11} - 10\frac{10}{11} = 32\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD

Jedna minuta ima 60 sekundi, pa je $\frac{8}{11}$ min $= \frac{8}{11} \cdot 60$ s $\approx 44\ s$. U periodu između 11 i 12 sati između dva tražena trenutka proteći će približno 32 minute i 44 sekunde. 1 BOD

……………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Kazaljke određuju pravi kut u točno 3:00 sati. To se ponovno događa nešto malo kasnije od 4:05, pa nakon 5:10, 6:15, itd.

Vremenski razmaci između trenutaka kada kazaljke zatvaraju pravi kut su jednaki.

Od 3:00 do 15:00 tj. unutar 12 sati točno 11 puta kazaljke određuju pravi kut. 4 BODA

Dakle, razmak je $\frac{12}{11}$ sata, te se takav položaj događa između 11 i 12 sati u $3 + 8 \cdot \frac{12}{11}$ sati. 2 BODA

Analogno, kazaljke u 9:00 sati određuju pravi kut. Te situacije se također ponavljaju svakih $\frac{12}{11}$ sata, a između 11 i 12 sati se takav položaj događa u $9 + 2 \cdot \frac{12}{11}$ sati. 2 BODA


…

Razlika između ta dva vremena je $\left(3 + 8 \cdot \frac{12}{11}\right) - \left(9 + 2 \cdot \frac{12}{11}\right) = \frac{129}{11} - \frac{123}{11} = \frac{6}{11}$ sati.

Budući da je $\frac{6}{11}\,\mathrm{h} = 32\frac{8}{11}$ min $\approx 32$ min 44 s, u periodu između 11 i 12 sati između dva tražena trenutka proteći će približno 32 minute i 44 sekunde. 2 BODA

…………………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1.** Rješenje vrednovati s 10 BODOVA i ukoliko učenik odredi da je tražena razlika 32 minute i 43 sekunde zbog zaokruživanja međurezultata (prvi su puta kazaljke odredile pravi kut u 11 sati 10 minuta i 55 sekundi, a drugi puta u 11 sati 43 minute i 38 sekundi).

**Napomena 2.** U drugom rješenju nije potrebno nacrtati skice da bi se ostvarili pripadni bodovi.

**5.** Odredi sve prirodne brojeve koji se mogu prikazati kao umnožak pet faktora za koje vrijedi:

- svaki od faktora prosti je broj
- barem tri faktora su jednaka
- zbroj svih pet faktora iznosi 40.

Za svaki takav broj odredi broj njegovih prirodnih djelitelja.

**Rješenje.**
Ako su svih pet faktora jednaki imamo $5a = 40$ tj. $a = 8$, što nije prost broj, pa nije zadovoljen uvjet zadatka. Ako su četiri faktora jednaka imamo $4a + b = 40$ pa je $b$ paran broj, odnosno $b$ =2. Slijedi $4a = 38$, odnosno $a = 9.5$, što također ne zadovoljava uvjet zadatka. 1 BOD

Neka su $a$, $b$ i $c$ prosti faktori traženog broja gdje je $a$ prosti faktor koji se pojavljuje tri puta.
Za preostala se dva ne zna jesu li međusobno jednaka ili različita.
Vrijedi $3a + b + c = 40$. Imamo sljedeće mogućnosti:

| $a$ | $3a$ | $b+c$ | $a^3 \cdot b \cdot c$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 34 | $\mathbf{2^3 \cdot 3 \cdot 31 = 744}$ |
| 2 | 6 | 34 | $\mathbf{2^3 \cdot 5 \cdot 29 = 1160}$ |
| 2 | 6 | 34 | $\mathbf{2^3 \cdot 11 \cdot 23 = 2024}$ |
| 2 | 6 | 34 | $\mathbf{2^3 \cdot 17 \cdot 17 = 2312}$ |
| 3 | 9 | 31 | $\mathbf{3^3 \cdot 2 \cdot 29 = 1566}$ |
| 5 | 15 | 25 | $\mathbf{5^3 \cdot 2 \cdot 23 = 5750}$ |
| 7 | 21 | 19 | $\mathbf{7^3 \cdot 2 \cdot 17 = 11662}$ |
| 11 | 33 | 7 | $\mathbf{11^3 \cdot 2 \cdot 5 = 13310}$ |
| 13 | 39 | 1 | **nema rješenja** |

4 BODA
(po 1 BOD za 2 točna rješenja)

Ako se u rastavu pojave tri prosta broja veća ili jednaka 13, zbroj će preostala dva faktora biti manji od 2, pa zaključujemo da su navedena rješenja ujedno i jedina. 1 BOD

Ako je $x$ traženi broj, s rastavom na proste faktore $x = a^3 \cdot b \cdot c$ , tada su djelitelji broja $x$ brojevi $1, a, a^2, a^3, b, c, ab, bc, ac, a^2b, a^2c, a^3b, a^3c, abc, a^2bc, a^3bc$ i ima ih 16. 3 BODA

Analogno, ako je $x$ traženi broj, s rastavom na proste faktore $x = a^3 \cdot b^2$, tada su djelitelji broja $x$ brojevi $1, a, a^2, a^3, b, ab, b^2, a^2b, a^3b, ab^2, a^2b^2, a^3b^2$ i ima ih 12. 1 BOD

Stoga brojevi 744, 1160, 2024, 1566, 5750, 11662 i 13310 imaju po 16 djelitelja, a broj 2312 ima 12 djelitelja.
…………………………………………………………………………........ UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1.** Broj djelitelja se može odrediti kombinatorno i na sljedeći način.
Svaki djelitelj umnoška $a^3bc$ je oblika $a^m \cdot b^n \cdot c^k$ za $m \in \{0,1,2,3\}, n \in \{0,1\}, k \in \{0,1\}$, pa je broj prirodnih djelitelja takvog broja $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
Analogno, djelitelji umnoška $a^3b^2$, su oblika $a^m \cdot b^n$, pri čemu je $m \in \{0,1,2,3\}, n \in \{0,1,2\}$, pa je broj prirodnih djelitelja takvog broja $4 \cdot 3 = 12$.

U oba slučaja se koristi isti način zaključivanja te nije važno kojim redom se slučajevi razmatraju. Ako učenik razmatra samo jedan slučaj i dođe do ispravnog zaključka, treba dobiti 3 BODA.

Ova uputa o bodovanju se odnosi i na pristup prikazan u rješenju.

**Napomena 2.** Učenik može odrediti broj djelitelja nabrajanjem svih djelitelja.

| $a^3bc$ | Djelitelji | Ukupan broj djelitelja |
|---|---|---|
| 744 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 31, 62, 93, 124, 186, 248, 372, 744 | 16 |
| 1160 | 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 29, 40, 58, 116, 145, 232, 290, 580, 1160 | 16 |
| 2024 | 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024 | 16 |
| 2312 | 1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136, 289, 578, 1156, 2312 | 12 |
| 1566 | 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 29, 54, 58, 87, 174, 261, 522, 783, 1566 | 16 |
| 5750 | 1, 2, 5, 10, 23, 25, 46, 50, 115, 125, 230, 250, 575, 1150, 2875, 5750 | 16 |
| 11662 | 1, 2, 7, 14, 17, 34, 49, 98, 119, 238, 343, 686, 833, 1666, 5831, 11662 | 16 |
| 13310 | 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605, 1210, 1331, 2662, 6655, 13310 | 16 |

Treba dodijeliti po 1 BOD za svaka dva retka tablice.